série n°2

4ème.sc

EXERCICE N°1

Soit la suite réelle u définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 3}{u_n} \; ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1/a) Montrer que la suite u est minorée par 3

b) Montrer que la suite u est décroissante

c) En déduire que la suite u est convergente

2/a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 3 \leq \dfrac{1}{3}(u_n - 3)$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - 3 \leq (\dfrac{1}{3})^n$.

c) Calculer la limite de la suite u

EXERCICE N°2

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0,2]$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$

1/a) Donner les variation de f sur l'intervalle $[0,2]$

b) Montrer que si $x \in [1,2]$ alors $f(x) \in [1,2]$

c) Tracer la représentation graphique de f dans un R.O.N $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 4 cm)

2/ Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \; , \; n > 0 \end{cases}$

a) Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de la suite u

b) A partir du graphique que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence de la suite u

3/a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$

b) Montrer que u converge vers $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

EXERCICE N°3

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \; ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que la suite u est décroissante

2) Montrer que la suite u est convergente

3) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$

EXERCICE N°4

Calculer :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3x^2 + x} - 2x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2 - 2} - 2x$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 3} + x + 2$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x \sin(\dfrac{1}{x})$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\sin^2 \pi x}$

Nombres complexes(Q.C.M)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$

E1 Soit le nombre complexe $z = 2 + i(3 - 7i)$

- A ☐ La partie réelle de z est 2
- B ☐ z a pour image le point M(9 ;3)
- C ☐ La partie imaginaire de z est 3
- D ☐ Le conjugué de z est $\bar{z} = 2 - i(3 - 7i)$
- E ☐ Le module de z est $|z| = \sqrt{10}$

E2 Soit le nombre complexe $z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{i}$

- A ☐ La forme algébrique de z est : $z = \sqrt{3} - i$
- B ☐ $|z| = 2$
- C ☐ $\arg(z) = \dfrac{5\pi}{6} \pmod{2\pi}$
- D ☐ Le point M image de z est l'un des points d' intersection du cercle de centre O, de rayon 2, et de la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.
- E ☐ $z^6 = -64$

E3 L'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie

- A ☐ $|z| = 2$ est le cercle de centre O et de rayon 2.
- B ☐ $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ est l'axe des ordonnées.
- C ☐ $\left(|z| = 2 \text{ et } \arg(z) = \dfrac{\pi}{4} \pmod{2\pi}\right)$ est la droite d'équation $y = 2x$
- D ☐ $\text{Ré}(z) = -1$ est le point de coordonnées (-1 ; 0)
- E ☐ $(|z| = 2 \text{ et } \text{Im}(z) = 1)$ est le point d'affixe $z = -\sqrt{3} + i$

E4 Soit les nombres complexes

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad z_2 = 2\,e^{-i\frac{\pi}{6}} \quad ; \quad z_3 = \sqrt{3}\,e^{-i\frac{7\pi}{6}}$$

- A ☐ $z_1 z_2 = 2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$
- B ☐ $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1}{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$
- C ☐ $z_1^3 = 1$
- D ☐ $z_1 z_2 z_3 = 2\sqrt{3}\,e^{-i\frac{7\pi}{6}}$
- E ☐ $\overline{z_3} = \sqrt{3}\,e^{-i\frac{5\pi}{6}}$